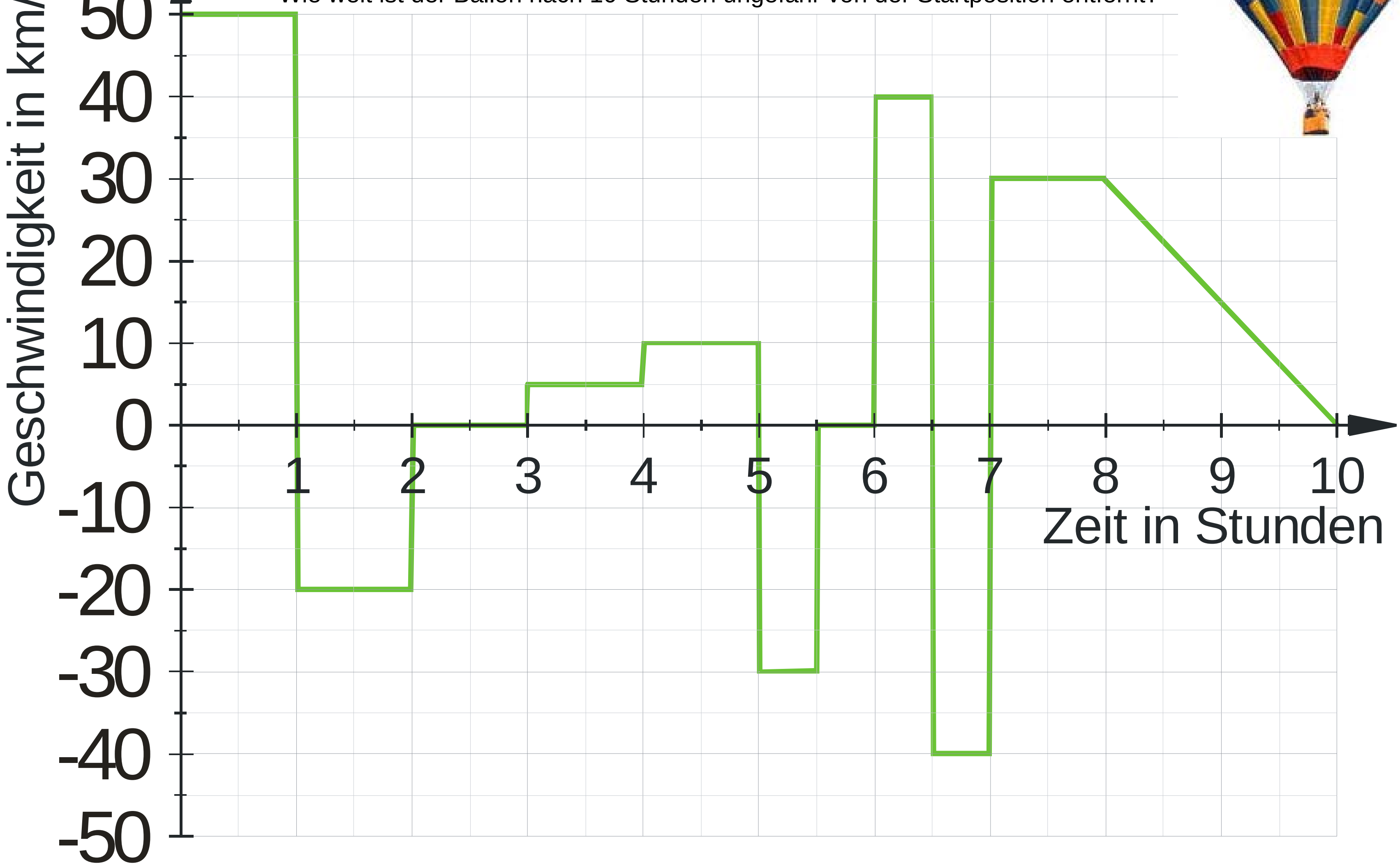
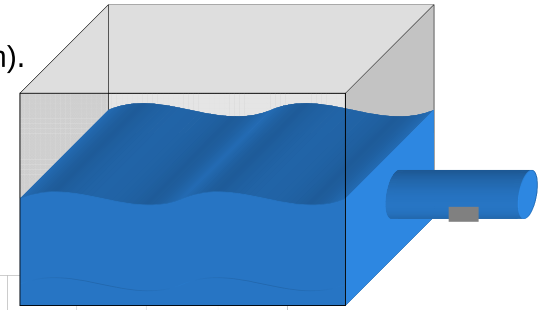
Ein Heißluftballon bewegt sich innerhalb von 10 Stunden mit dem Wind vor und zurück. Zur Vereinfachung soll die Höhenänderung vernachlässigt werden und die Annahme gelten, dass sich der Ballon nur geradlinig bewegt.
Während des Fluges wird die Geschwindigkeit aufgezeichnet (siehe Diagramm).

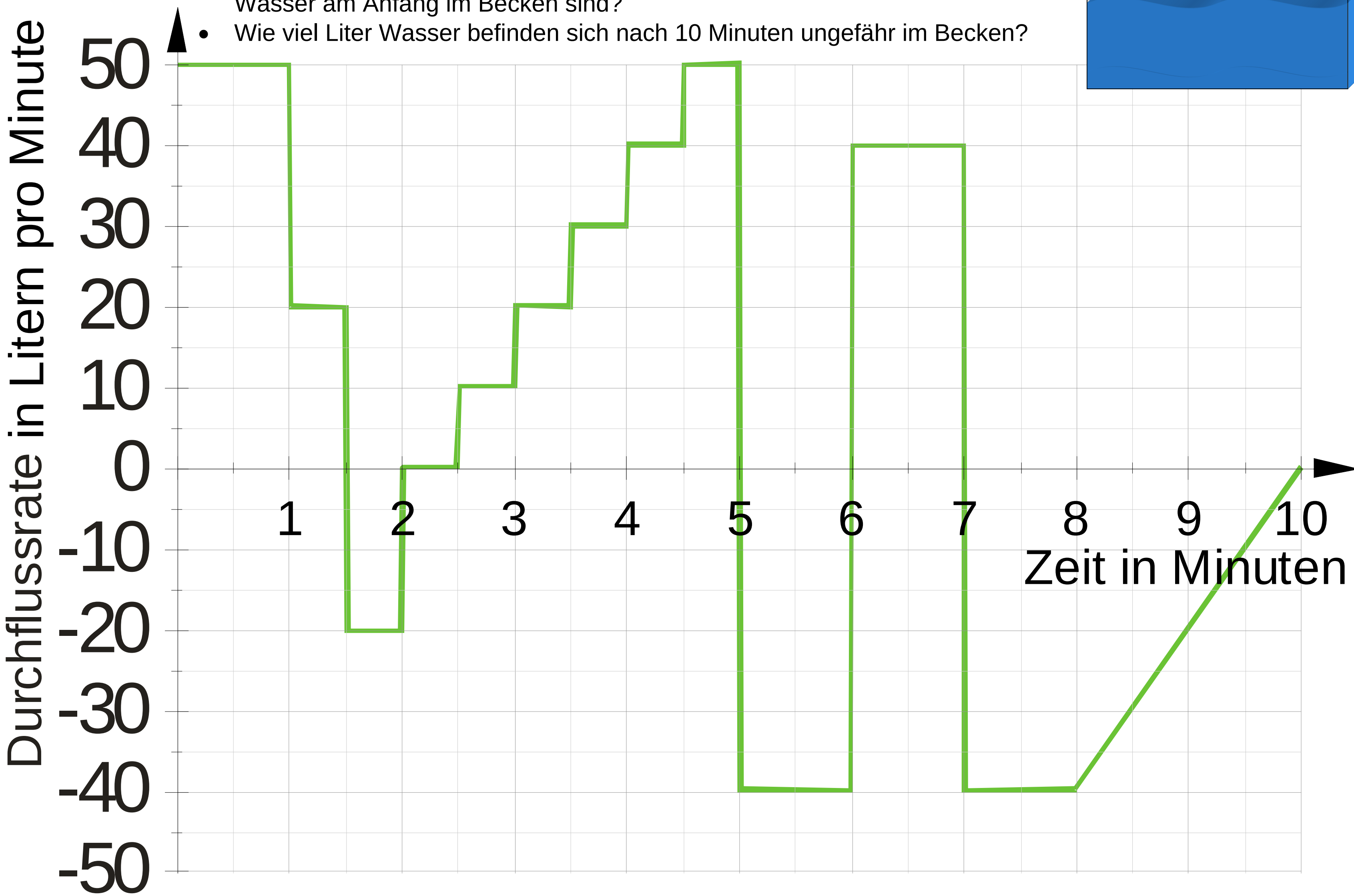
- Wann ist der Ballon vorwärts und wann rückwärts geflogen?
- Wie weit war der Ballon nach 2 Stunden ungefähr von der Startposition entfernt?
- Wie weit war der Ballon nach 7 Stunden ungefähr von der Startposition entfernt?
- Wie weit ist der Ballon nach 10 Stunden ungefähr von der Startposition entfernt?



Ein Wasserbecken kann durch ein Rohr befüllt und entleert werden. Im Rohr wird die Durchflussrate des Wassers in Abhängigkeit von der Zeit gemessen (siehe Diagramm). Zum Zeitpunkt t= 0 Minuten befanden sich 100 Liter Wasser bereits im Becken.

- Wann wurde das Becken befüllt und wann entleert?
- Warum startet der Graph beim Wert 50 auf der y-Achse, wenn doch 100 Liter Wasser am Anfang im Becken sind?
- Wie viel Liter Wasser befinden sich nach 10 Minuten ungefähr im Becken?





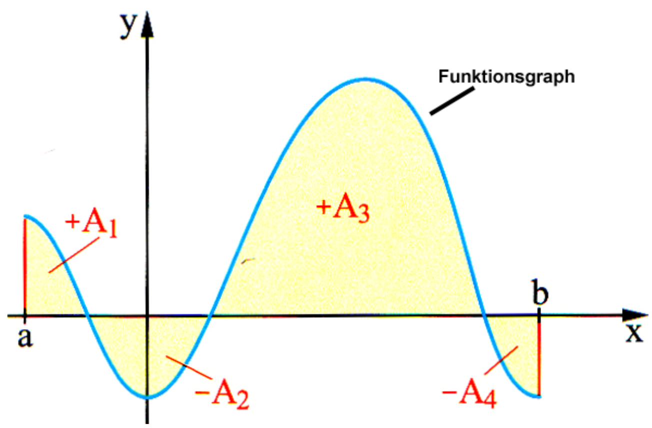
Integral: anschauliche Definition

Eine stetige Funktion f sei definiert über einem abgeschlossenen Intervall a bis b.
Das **Integral** von a bis b **der Funktion f** entspricht dann der **Summe der orientierten* Flächeninhalte** zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse im Intervall a bis b.

Schreibweise: $\int_a^b f(x)\ dx$

** orientiert bedeutet, dass Flächen unterhalb der x-Achse ein negatives und Flächen oberhalb der X-Achse ein positives Vorzeichen haben.*

Beispiel:



Hierbei ist

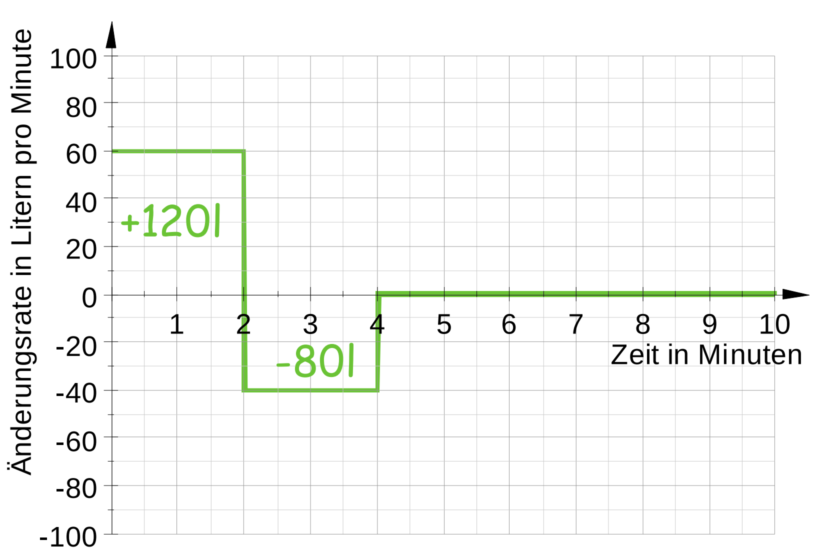
$$\int_a^b f(x)\ dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

Im Ausdruck $\int_a^b f(x)\ dx$ nennt man a und b die ***Grenzen*** des Integrals, wobei a die ***untere Grenze*** und b die ***obere Grenze*** ist.

Die Funktion f heißt ***Integrand*** oder ***Integrandenfunktion***.

Die Berechnung des Integrals nennt man ***Integrieren***.

*Bei der **Integration von a bis b einer Änderungsrate** rechnet man die **Wirkung der Änderungsrate zwischen a und b auf den Bestand bei a** aus.*



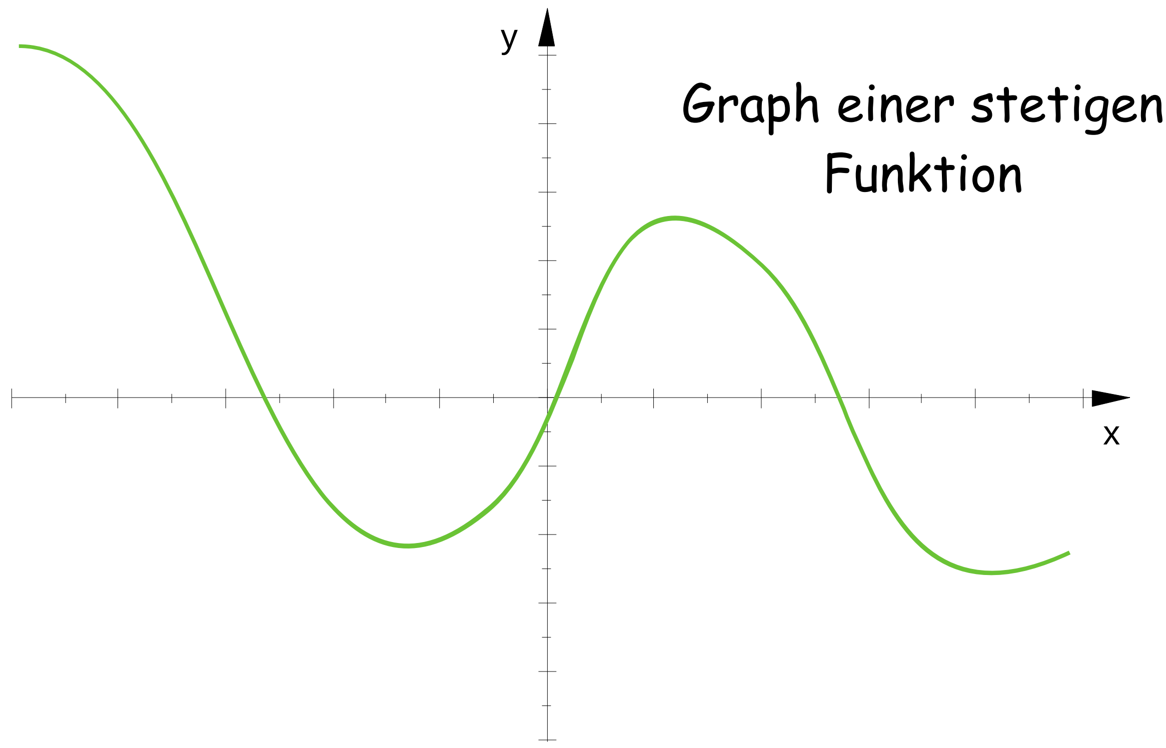
Beispiel: Ein Tank wird befüllt und entleert. Die Änderungsrate $a(t)$ ist im linken Diagramm dargestellt.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ min seien 10 Liter im Tank.
Nach 10 Minuten sind ca. 50 Liter im Tank,
da $\int_{0\text{ min}}^{10\text{ min}} a(t)\ dt \approx 40$ Liter ist.

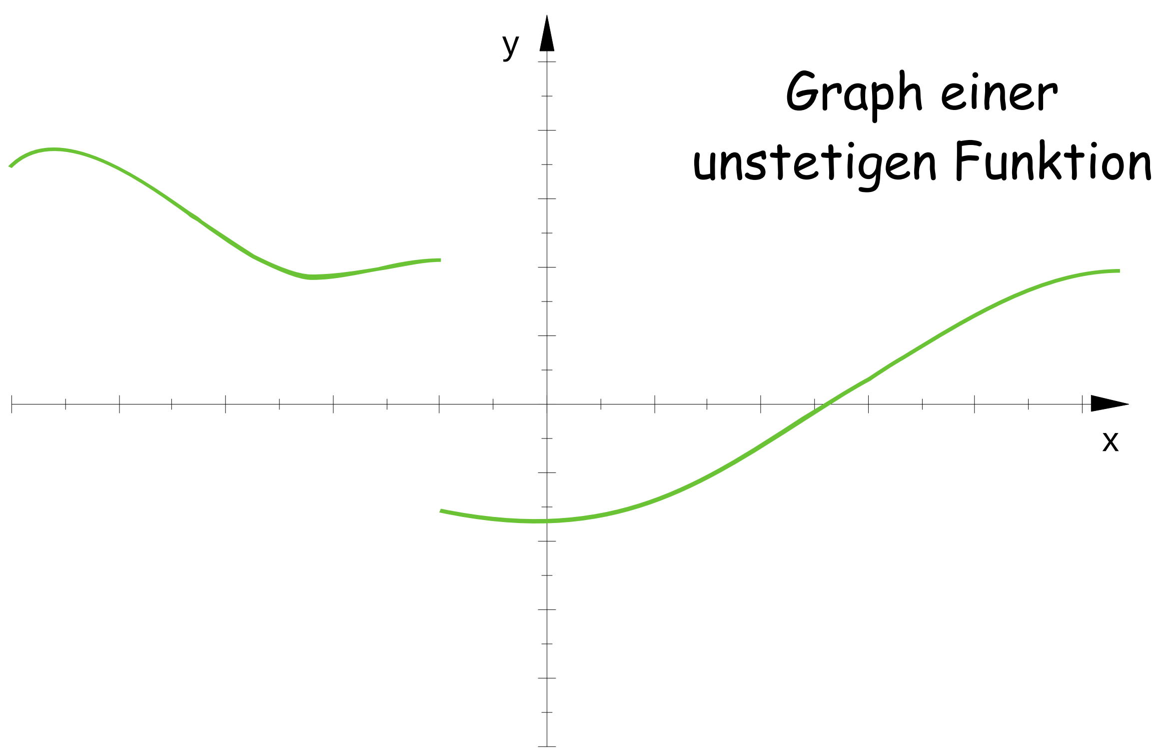
„Die Änderungsrate hat also zwischen 0 und 10 Minuten bewirkt, dass 40 Liter hinzugekommen sind".

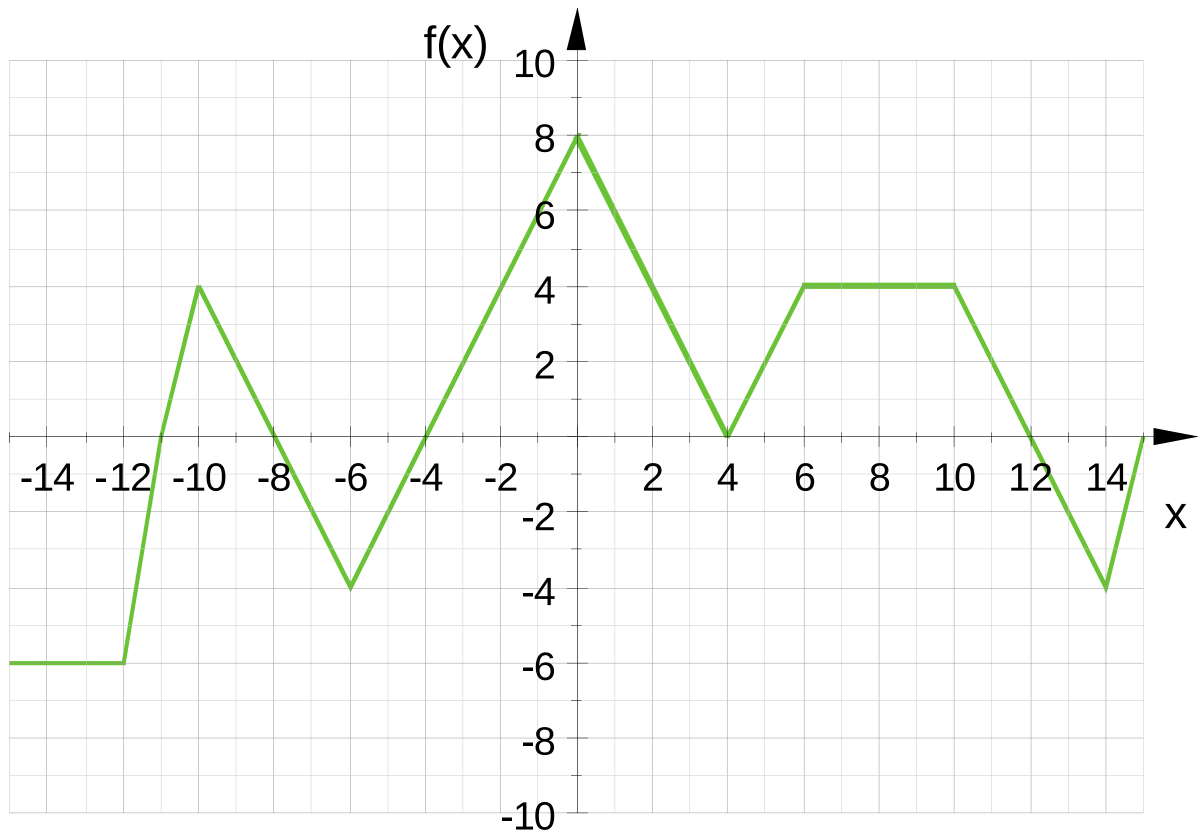
Anschauliche Interpretation von Stetigkeit

„ Geringe Änderungen der Variablen haben geringe Änderungen der Funktionswerte zur Folge.“

„Liegt x_1 nahe bei x_2, dann liegt auch $f(x_1)$ nahe bei $f(x_2)$.“







Bestimme mittels der oberen Grafik die Werte der folgenden Integrale:

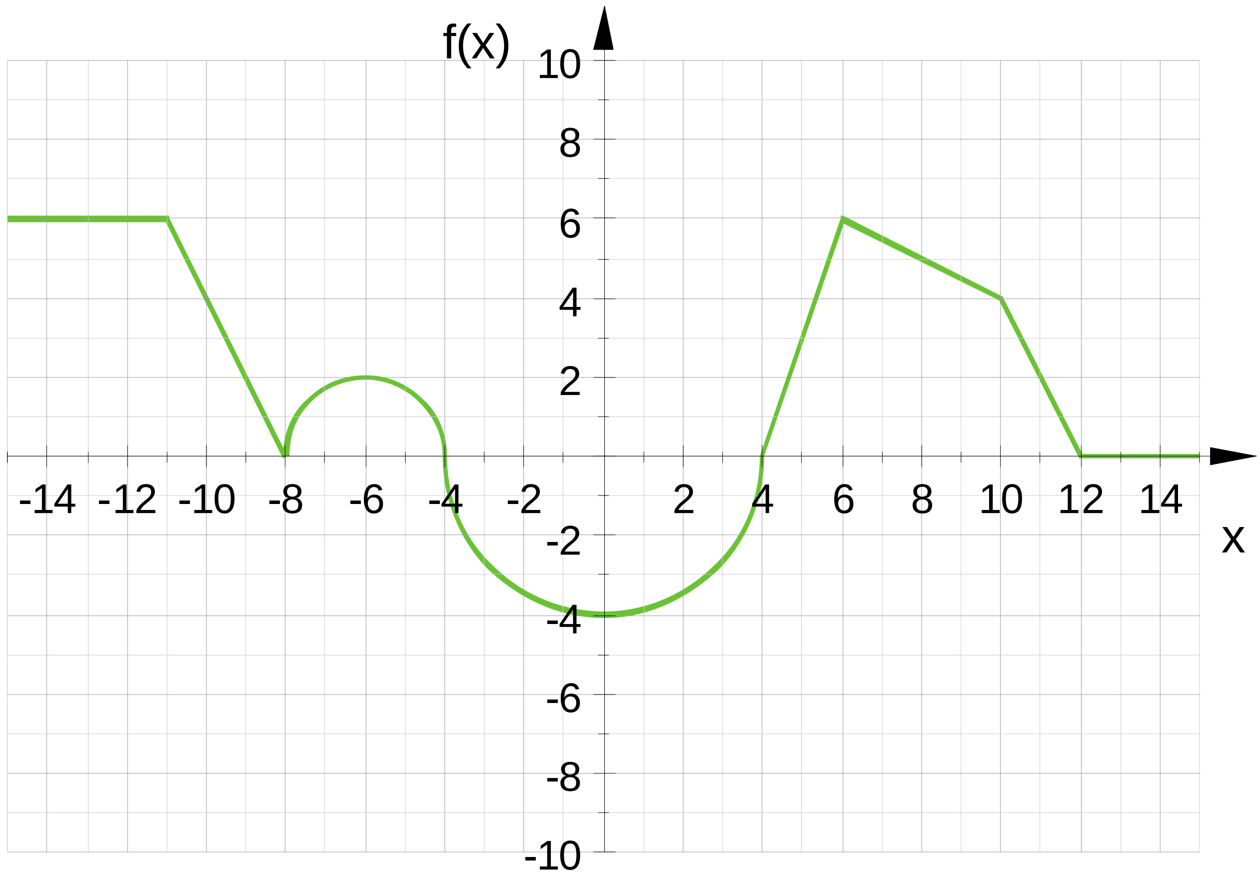
a) $\int_{-15}^{-11} f(x)\, dx$

b) $\int_{4}^{12} f(x)\, dx$

c) $\int_{10}^{14} f(x)\, dx$

d) $\int_{-6}^{4} f(x)\, dx$

e) $\int_{-15}^{15} f(x)\, dx$



Bestimme mittels der oberen Grafik die Werte der folgenden Integrale:

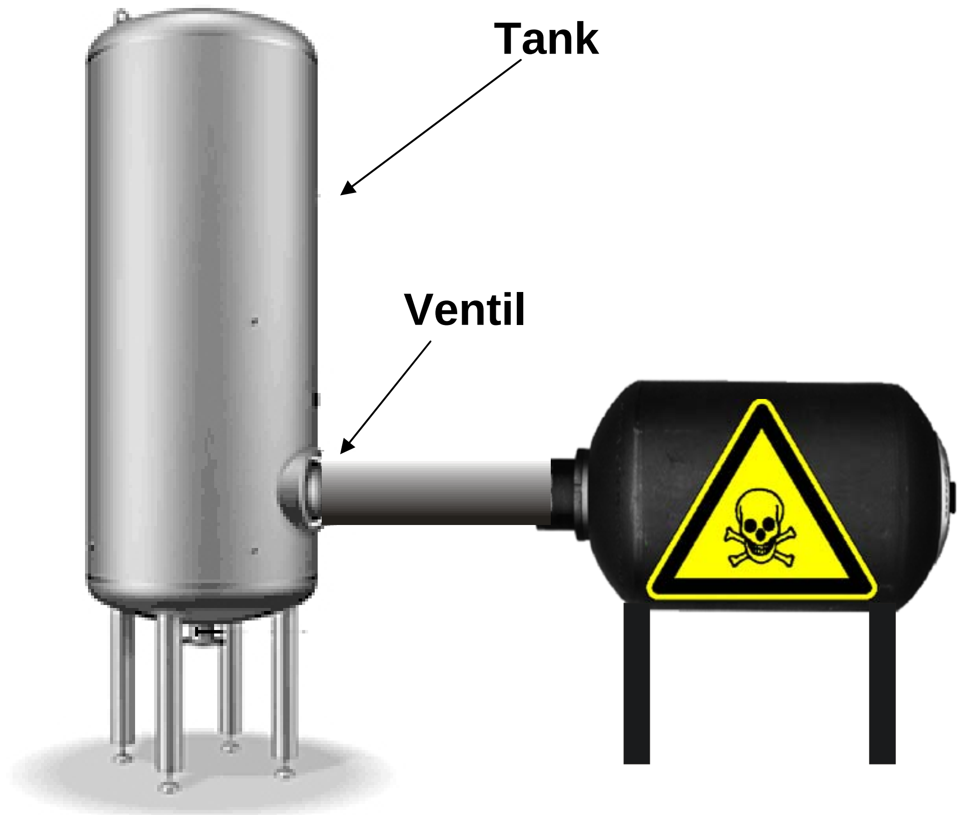
a) $\int_{-15}^{-8} f(x)\, dx$

b) $\int_{-8}^{4} f(x)\, dx$

c) $\int_{4}^{12} f(x)\, dx$

d) $\int_{12}^{14} f(x)\, dx$

e) $\int_{-15}^{15} f(x)\, dx$

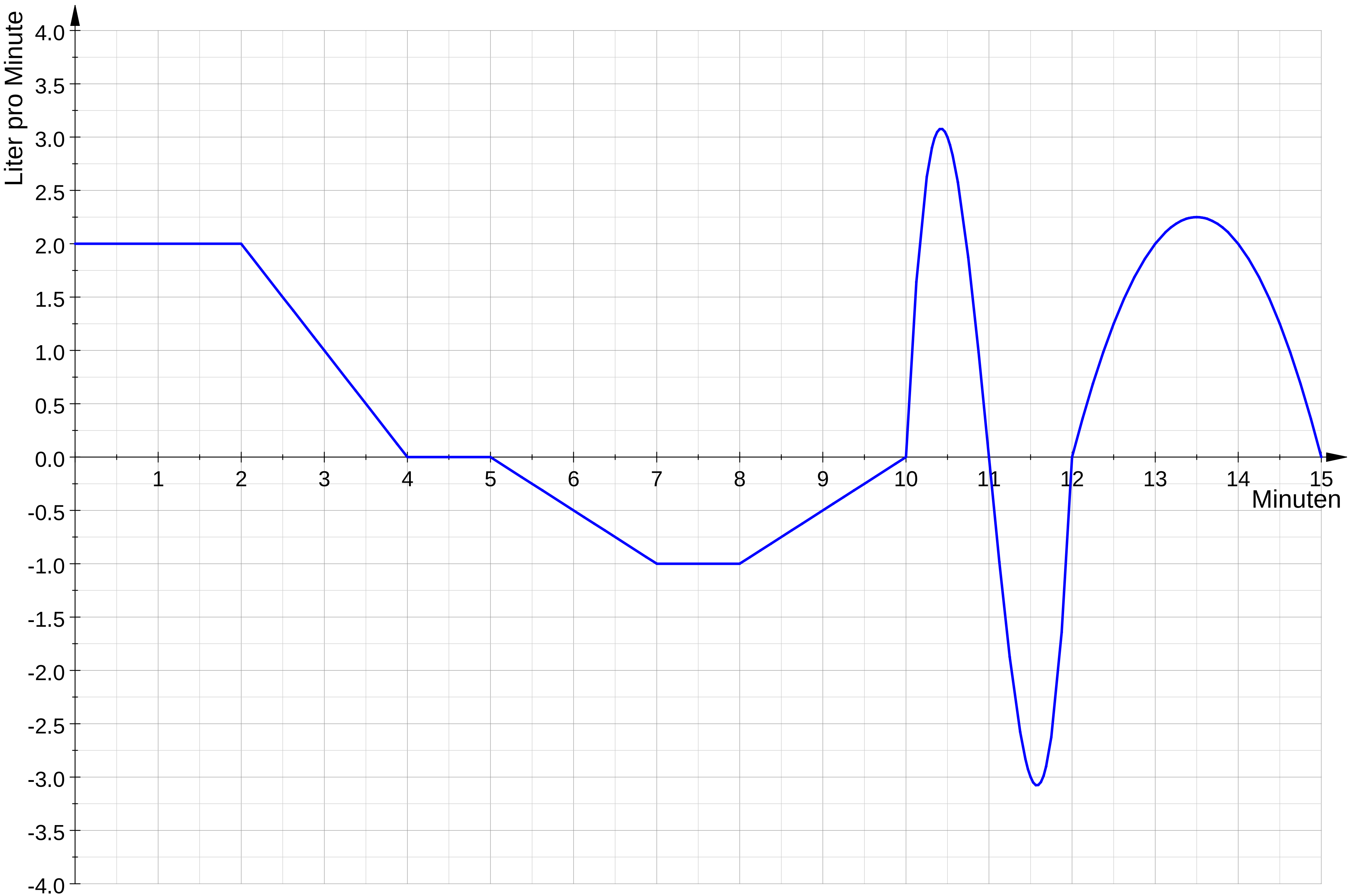


Ein Tank kann durch eine automatische Ventilvorrichtung befüllt und geleert werden.
Bei einem Füllvorgang soll der Tank automatisch mit 7,5 Liter eines hochgiftigen Gases aus einem anderen Behälter befüllt werden. Leider arbeitet die Ventilvorrichtung bei Beginn des Füllvorgangs nicht korrekt und wechselt mehrmals zwischen Befüllen und Entleeren. Nach 15 Minuten wird der Füllvorgang gestoppt. Glücklicherweise hat die Ventilvorrichtung die Einströmrate bzw. Ausströmrate des Gases in Litern pro Minute aufgezeichnet (siehe Diagramm), so dass man sicherstellen kann, wie viel Liter Gas sich zu bestimmten Zeitpunkten im Tank befanden.

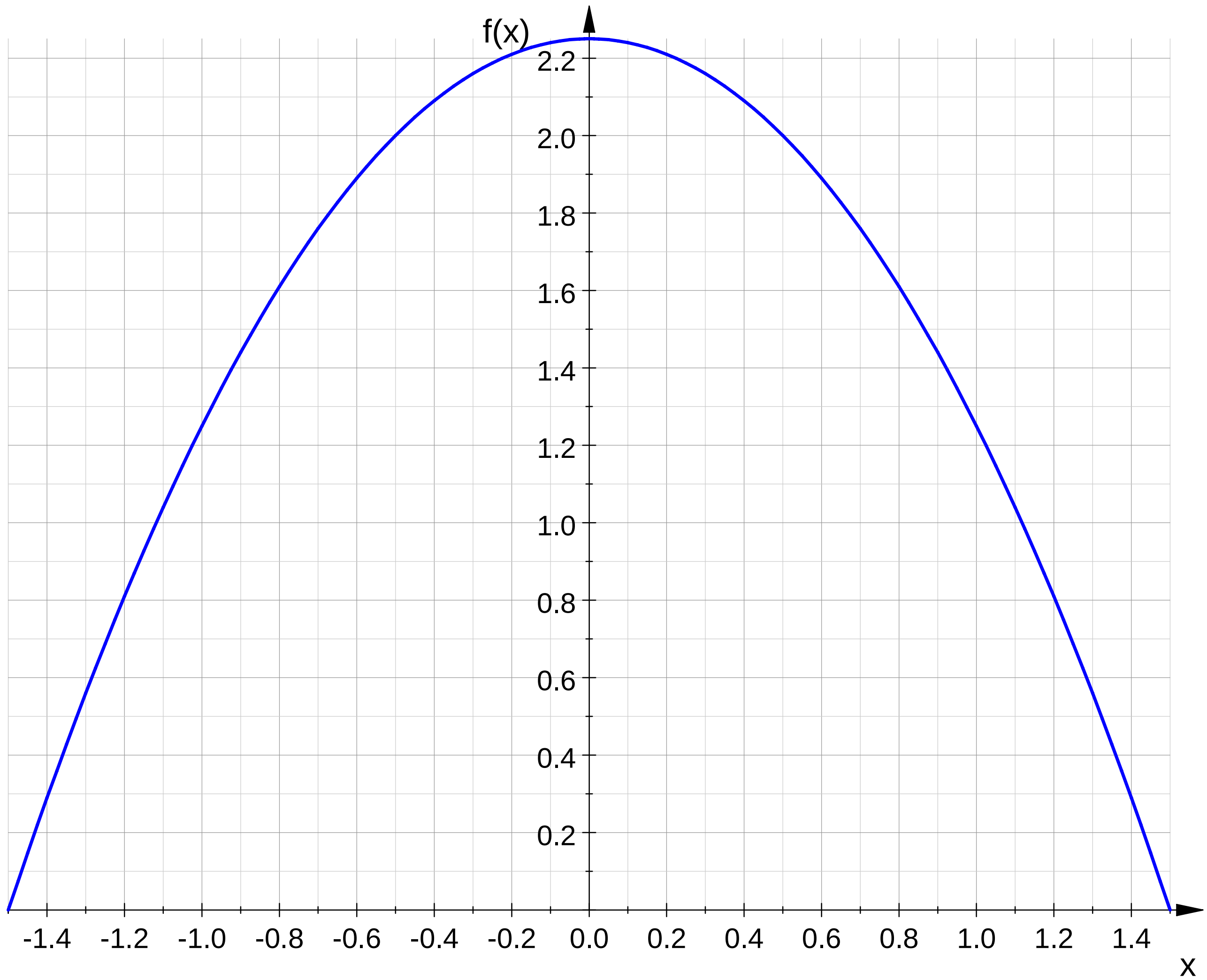
- *Vervollständige die Tabelle:*

Zeit in Minuten	**Gas im Tank in Litern**
2	
4	
5	
7	
8	
10	

- *Ist nach 15 Minuten alles Gas im Tank, so dass der Behälter gefahrlos vom Tank getrennt werden kann?*



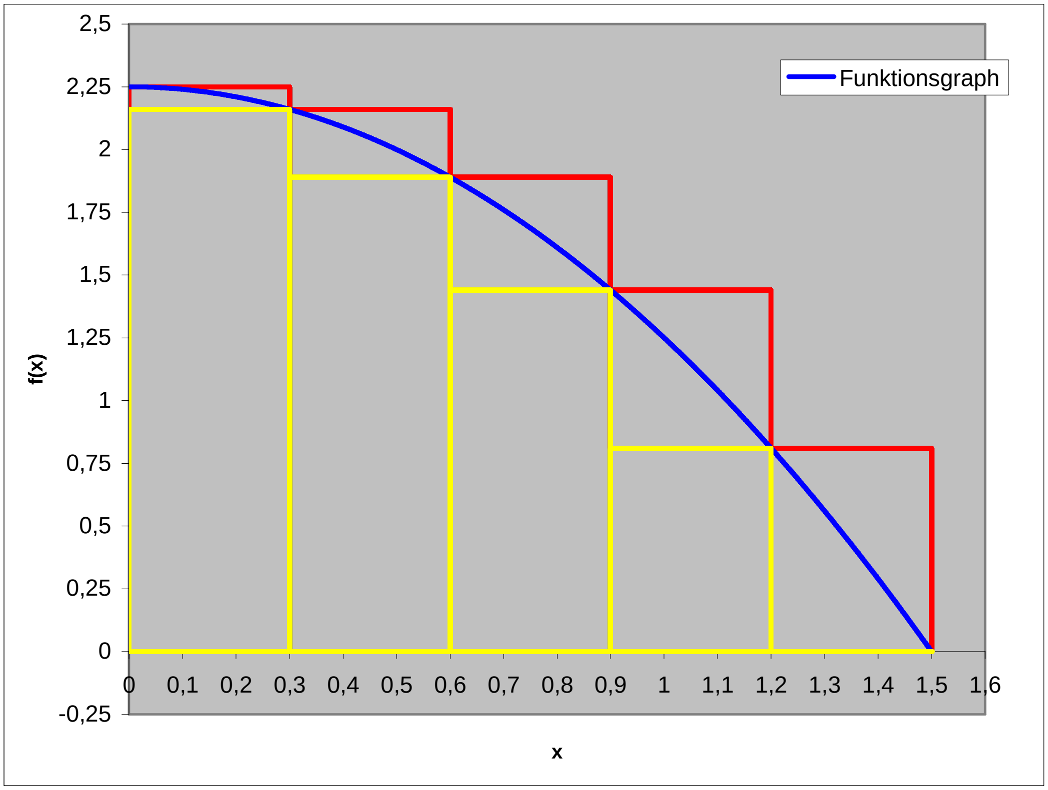
Liter pro Minute
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.5
-3.0
-3.5
-4.0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
Minuten



- Versuche die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse im Intervall [-1,5;1,5] möglichst genau zu bestimmen.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2{,}25$.

- Berechne jeweils die Gesamtfläche der 5 roten und 5 gelben Rechtecke.



- Stelle allgemeine Formeln auf, die die Gesamtflächen bei n roten und n gelben Rechtecken mit gleicher Breite berechnen.
  Die Rechtecke sollen wiederum im Intervall von 0 bis 1,5 verteilt sein und den Funktionsgraphen mit der linken oberen Ecke (rot) bzw. mit der rechten oberen Ecke (gelb) berühren.

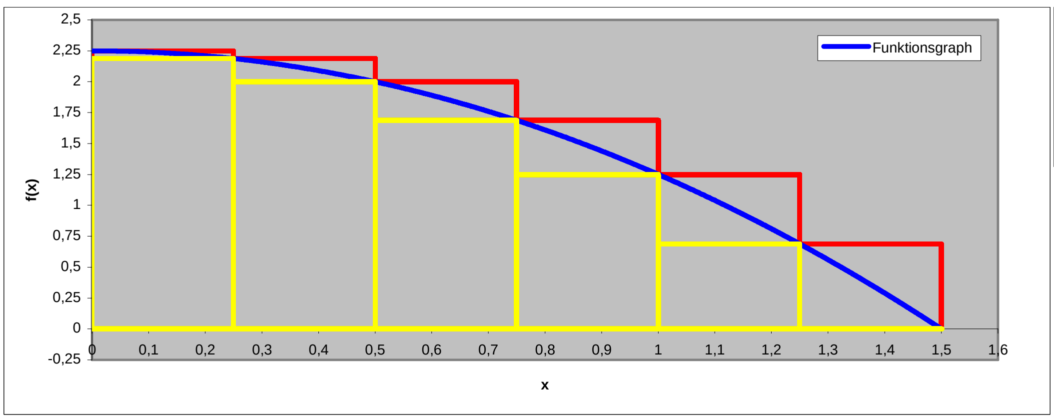
Integral: Definition über Produktsummen

Eine stetige Funktion f sei definiert über einem abgeschlossenen Intervall a bis bDas **Integral von a bis b der Funktion f,** geschrieben $\int_a^b f(x)\ dx$, ist dann eine Zahl, die auf folgende Weise berechnet werden kann:

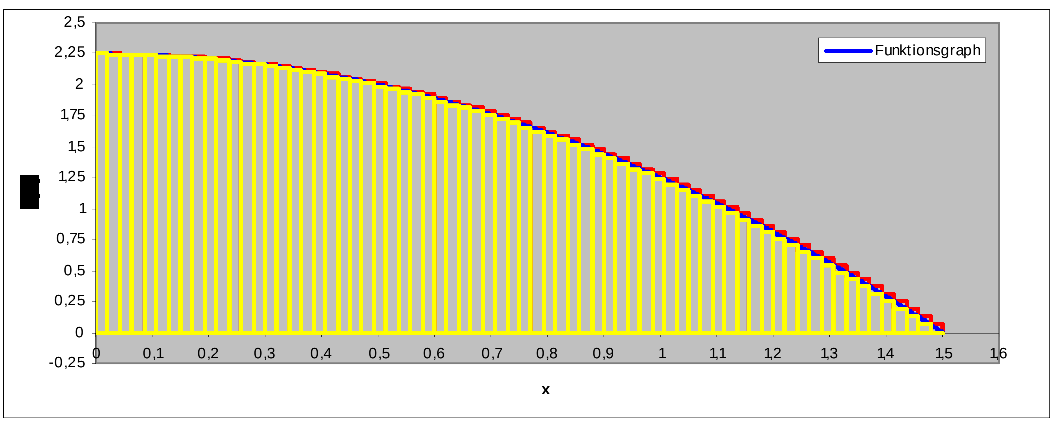
Man zerlegt das Intervall in n gleich lange Teilintervalle der Breite $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ und bildet die Summen:

$$S_l = \underbrace{f(a)\cdot\Delta x}_{\text{orientierte Fläche des 1. roten Rechtecks}} + \underbrace{f(a+1\cdot\Delta x)\cdot\Delta x}_{\text{orientierte Fläche des 2. roten Rechtecks}} + \underbrace{f(a+2\cdot\Delta x)\cdot\Delta x}_{\text{orientierte Fläche des 3. roten Rechtecks}} + \ldots + \underbrace{f(a+(n-1)\cdot\Delta x)\cdot\Delta x}_{\text{orientierte Fläche des n. roten Rechtecks}}$$

$$S_r = \underbrace{f(a+1\cdot\Delta x)\cdot\Delta x}_{\text{orientierte Fläche des 1. gelben Rechtecks}} + \underbrace{f(a+2\cdot\Delta x)\cdot\Delta x}_{\text{orientierte Fläche des 2. gelben Rechtecks}} + \ldots + \underbrace{f(a+(n-1)\cdot\Delta x)\cdot\Delta x}_{\text{orientierte Fläche des (n-1). gelben Rechtecks}} + \underbrace{f(a+n\cdot\Delta x)\cdot\Delta x}_{\text{orientierte Fläche des n. gelben Rechtecks}}$$



Beispiel 1:
Intervall $[0;1{,}5]$.
$n = 5$

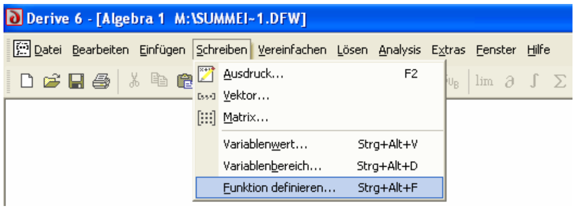


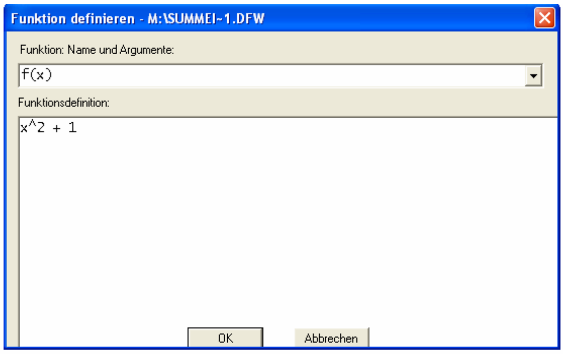
Beispiel 2:
Intervall $[0;1{,}5]$.
$n = 70$

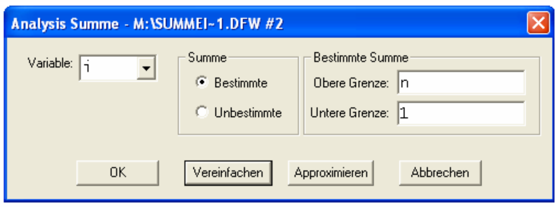
Falls ein gemeinsamer Grenzwert (für „unendlich schmale Rechtecke“) existiert, also $\lim\limits_{n\to\infty} S_l = \lim\limits_{n\to\infty} S_r$ gilt., so heißt dieser das ***Integral von a bis b der Funktion f***:

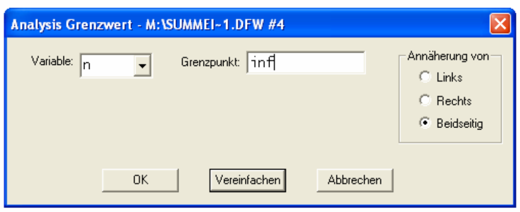
$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} S_l = \lim_{n\to\infty} S_r$$

Eine unendliche Summe von Produkten mit Funktionswerten berechnen



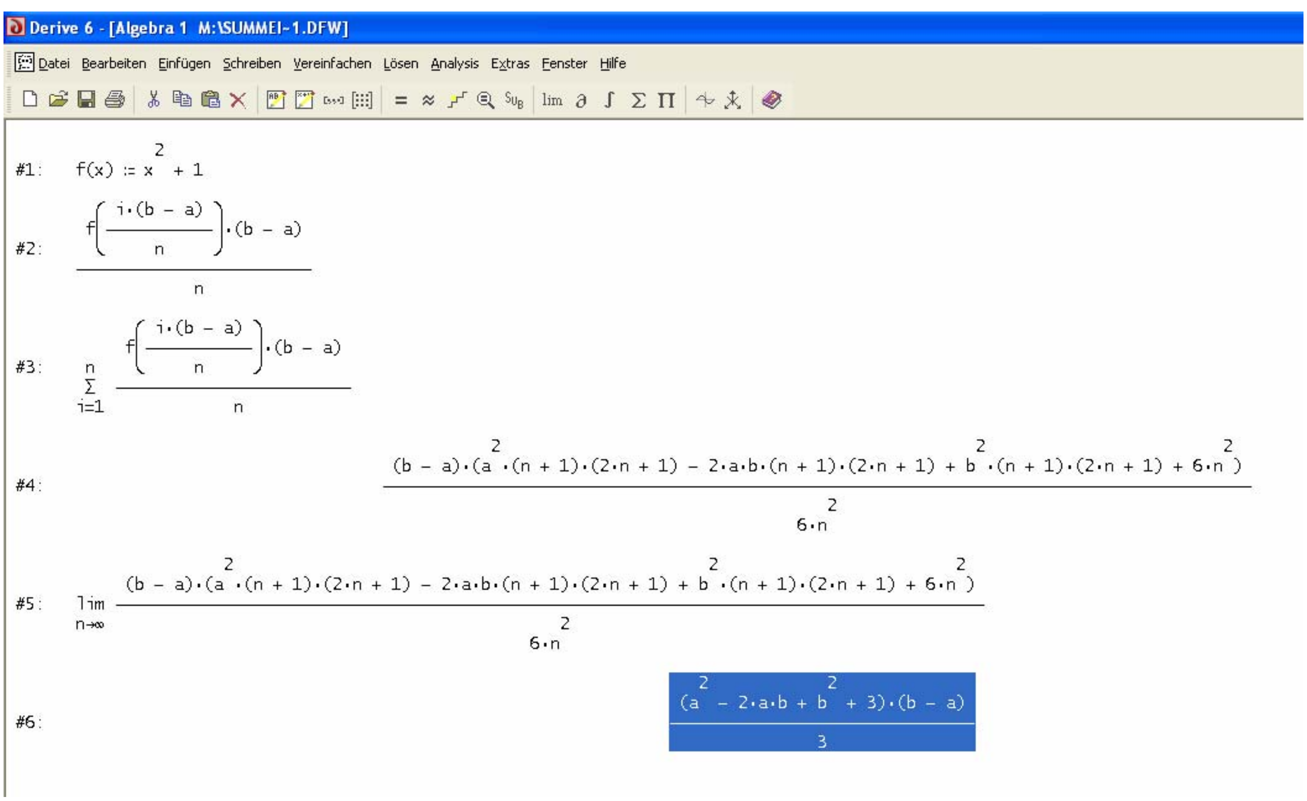






- Auf Schreiben/Funktion definieren… klicken (Bild 1) und Funktion definieren (Bild 2)
- Term über den summiert werden soll eingeben. Durch Klick markieren und auf Analysis/Summe… klicken. Summevariable wählen und Anfangswert und Endwert eingeben (Bild 3).
- Auf = klicken, um die Summe zu berechnen
- Berechnete Summe durch Klick markieren und auf Analysis/Grenzwert… klicken. Variable auswählen und Grenzpunkt eingeben (Bild 4, inf

  bedeutet unendlich)
- Auf = klicken, um den Grenzwert der Summe zu berechnen (Bild 5)

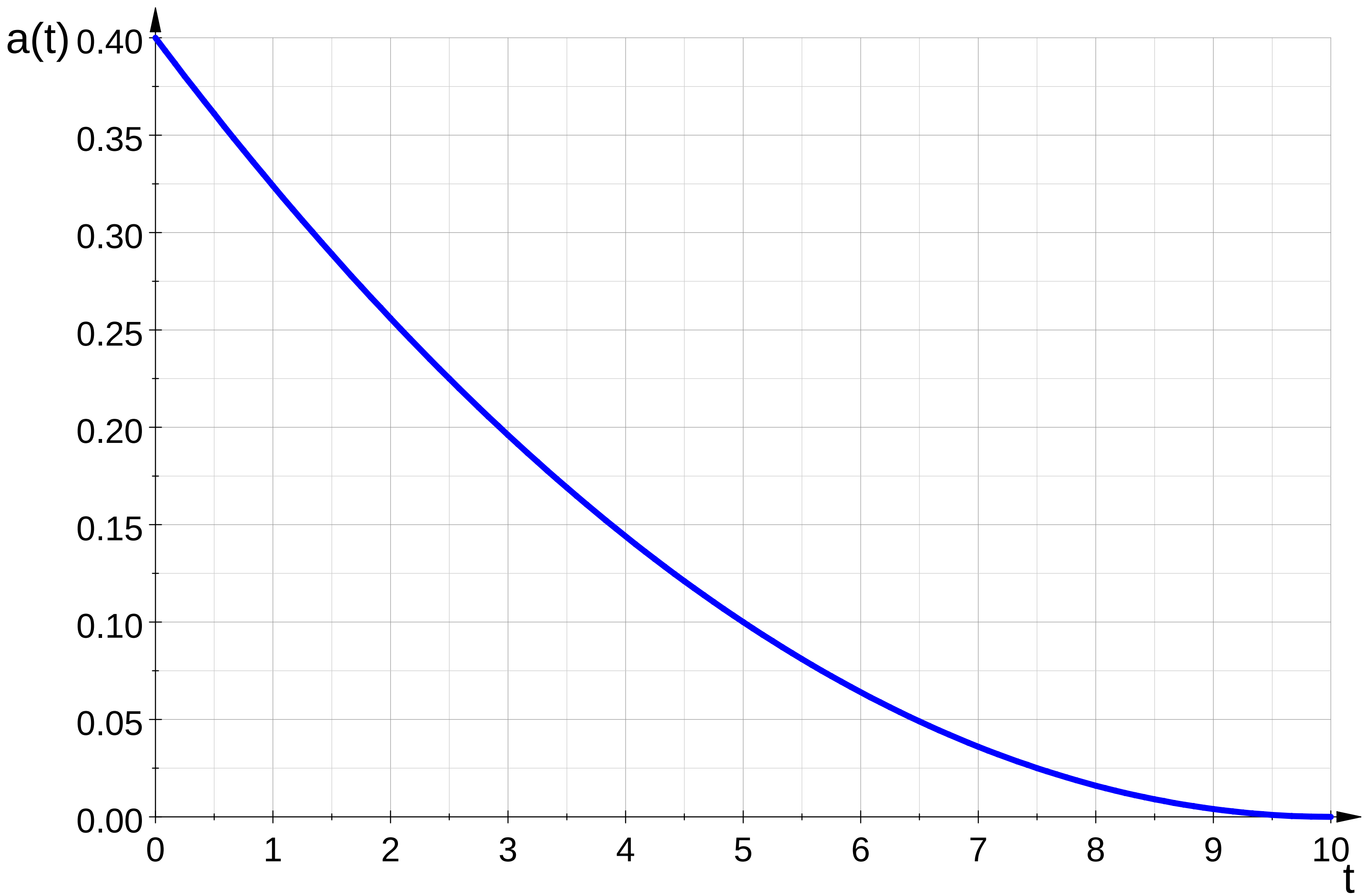


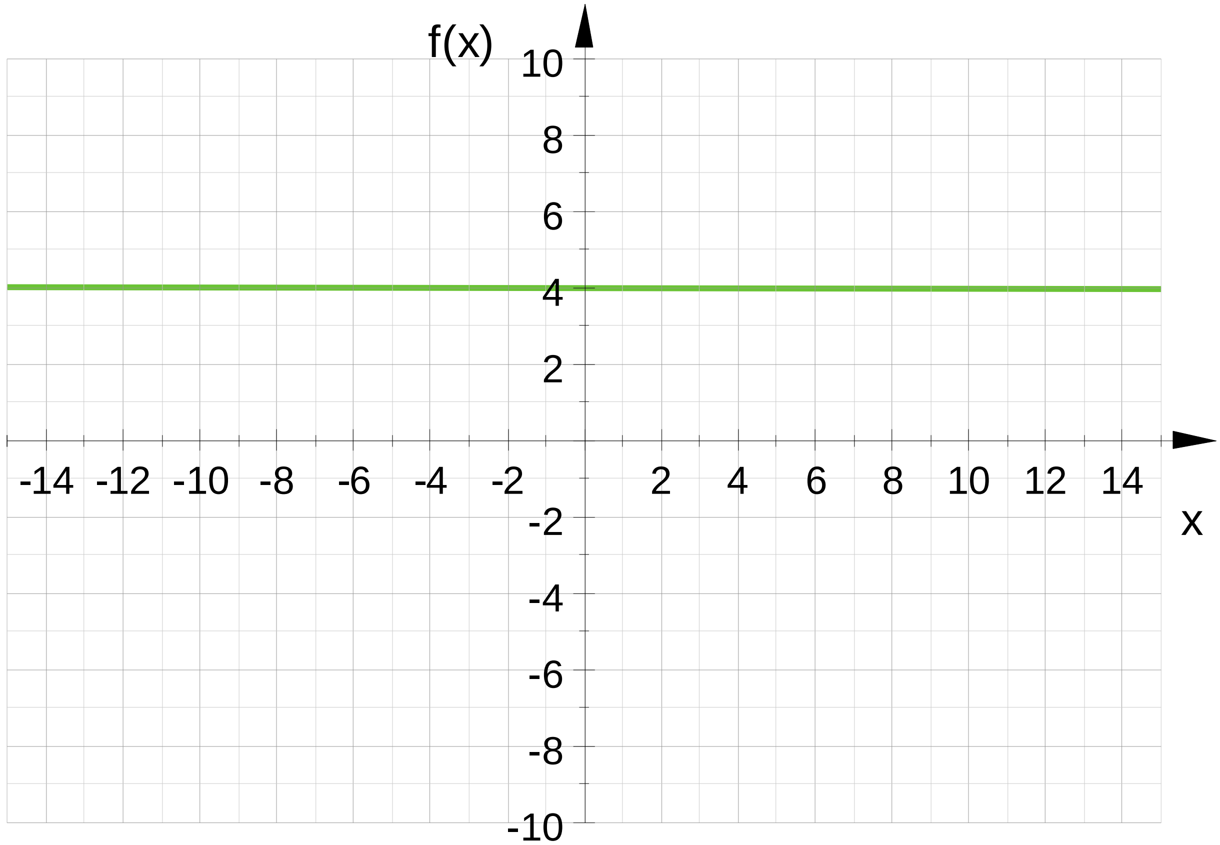
Bei einem Unfall in einer Fabrik wurden Schadstoffe freigesetzt.
Die Menschen, die in der Umgebung lebten, wurden evakuiert. Es soll bestimmt werden, wie viel diese Menschen von den Schadstoffen bis zum Zeitpunkt der Evakuierung eingeatmet haben…

Beispiel:

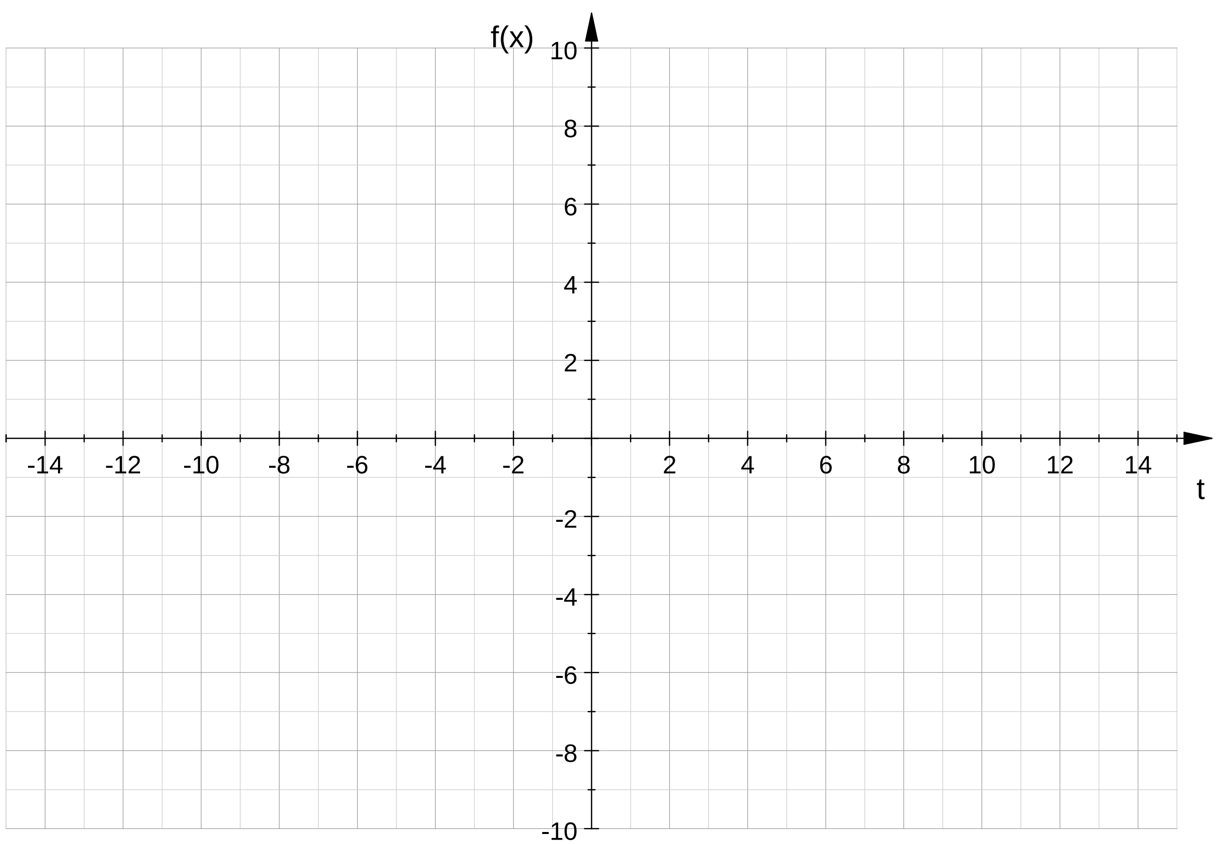
- Evakuierung erfolgt nach 5 Stunden
- Durchschnittsmensch: Aufnahmerate an Schadstoffen pro Stunde in μg im verseuchten Gebiet:

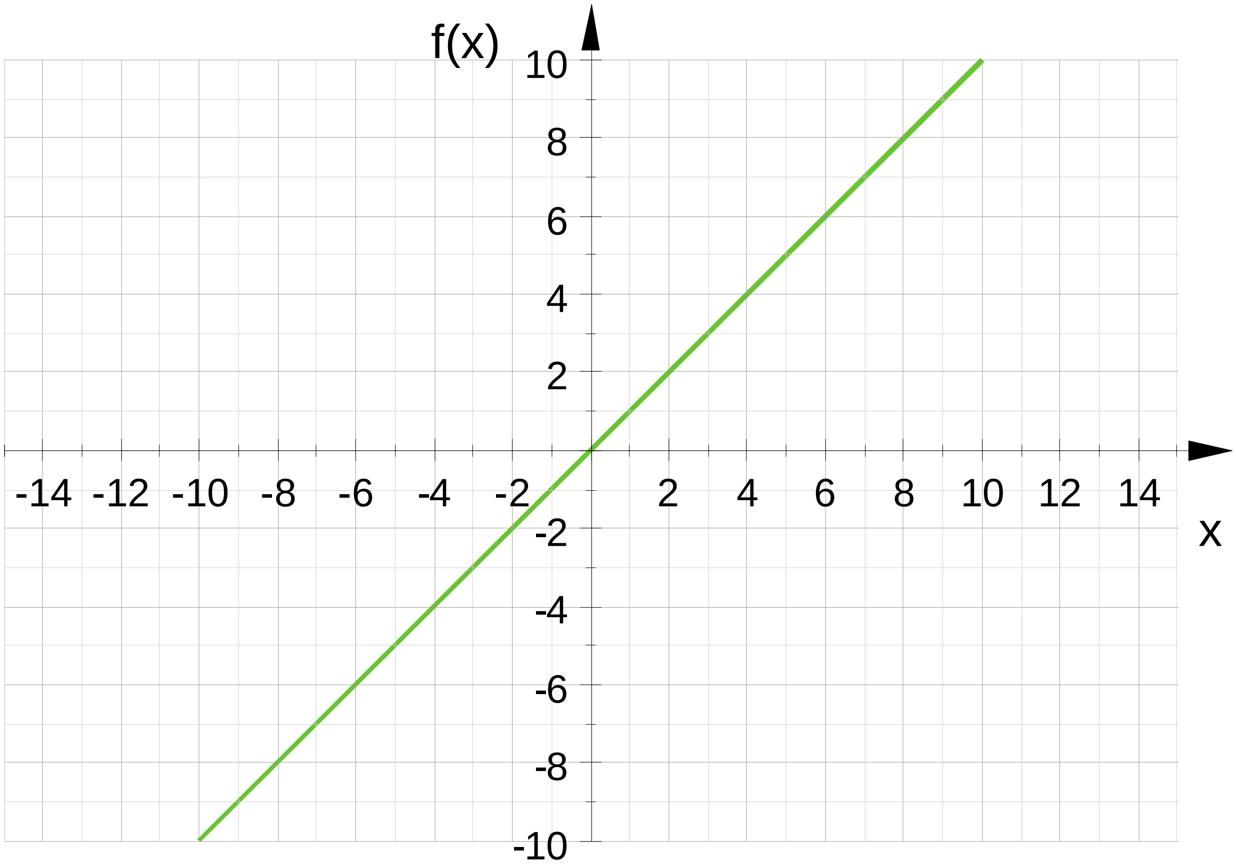
$$a(t) = 0{,}004 \cdot (t-10)^2$$





Bestimme mittels der oberen Grafik die Funktion $F(t) = \int_{-15}^{t} f(x)\, dx$ und stell deren Verlauf grafisch dar:





Bestimme mittels der oberen Grafik die Funktion $F(t) = \int_{-15}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$ und stell deren Verlauf grafisch dar: